Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

2021-1

Cálculo diferencial e integral avanzado

Sesión 12

2 de mayo de 2021

Sesión 12: Indice

1. Teorema de la función implícita bidimensional
2. Teorema de la función implícita en tres dimensiones
3. Teorema de la función implícita en dimesión mayor

Teorema de la función implícita bidimensional

Teorema: (Teorema de la función implícita bidimensional)

Sea $F(x,y)$ con derivadas parciales continuas en una vecindad de (x_0,y_0), donde $F(x_0,y_0)=r$, y sea $\partial_y F(x_0,y_0)\neq 0$.

Entonces existe un rectángulo $[a,b]\times[c,d]$ con centro en (x_0,y_0), donde para cada $x\in[a,b]$ existe un único $y=f(x)$ en $[c,d]$ que satisface la ecuación $F(x,y)=r$. Además $f(x_0)=y_0$, $\partial_y F(x,f(x))\neq 0$ $\forall x\in]a,b[$, y f es continua y tiene derivada continua en $]a,b[$ dada por

$$f'(x)=-\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))}.$$

Demostración:

Por una simple traslación podemos suponer que $x_0 = y_0 = r = 0$. Entonces $R = [a, b] \times [c, d]$ tiene la forma $[-\delta, \delta] \times [-\epsilon, \epsilon]$.

Podemos también asumir que $\partial_y F(x_0, y_0) = m > 0$ (el caso < 0 es simétrico).

Como $\partial_x F$ y $\partial_y F$ son continuas y $m > 0$ podemos escoger δ y ϵ tan pequenos que se cumpla $\partial_y F(x, y) > m/2$ y $|\partial_x F(x, y)| < M + 1$ para todo $(x, y) \in [-\delta, \delta] \times [-\epsilon, \epsilon]$, donde $M = |\partial_x F(x_0, y_0)|$.

Además, podemos reducir δ sin afectar estas condiciones de modo que $(M+1)\delta < m\epsilon/2$.

Fijemos $x \in [-\delta, \delta]$. Como $\partial_y F(x, y) > m/2$ para todo $y \in [-\epsilon, \epsilon]$, $y \mapsto F(x, y)$ es creciente.

Si probamos que existen $y_-, y_+ \in [-\epsilon, \epsilon]$ tal que $F(x, y_-) \leq 0 \leq F(x, y_+)$, el teorema del valor intermedio implica que existe un $y_- \leq y \leq y_+$ tal que $F(x, y) = 0$.

Éste es el $y = f(x)$ buscado.

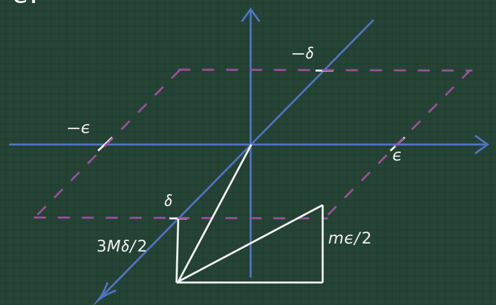
Para esto supongamos que $F(x, 0) \leq 0$, ie. escogemos $y_{-} = 0$ (el caso ≥ 0 es simétrico: $y_{+} = 0$).

Usamos el TVM: como la pendiente de F en el segmento entre $(0, 0)$ y $(x, 0)$ no es menor que $-M - 1$ y $|x| < \delta$, el menor valor que puede tomar $F(x, 0)$ es $> -(M + 1)\delta$.

Pero la pendiente de F en el segmento entre $(x,0)$ y (x,ϵ) es mayor a $m/2$, luego el menor valor que puede tomar $F(x,\epsilon)$ es

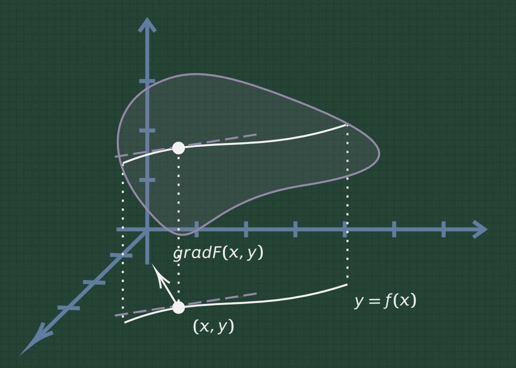
$$F(x,0)+m\epsilon/2 > -(M+1)\delta + m\epsilon/2 > 0.$$

Tomamos $y_+ = \epsilon$.



Esto prueba la existecia y unicidad de f.

Cerca a (x_0, y_0), $y = f(x)$ es una curva de nivel r de F, con r valor regular.



Entonces, como ya se mencionó, f tiene recta tangente dada por la proyección en el plano xy de la intersección del plano tangente a F y el plano $z = r$.

Por lo tanto es diferenciable y $\mathrm{grad}\, F$ es ortogonal a su vector tangente en cada punto, esto es

$$(\partial_x F(x,y), \partial_y F(x,y)) \cdot (1, f'(x)) = 0,$$

de donde se obtiene la fórmula para $f'(x)$. ■

Ejemplo:

¿Define la ecuación $F(x,y) = y - \sin xy = 0$ una función $y = f(x)$, diferenciable en una vecindad de $x = 1$?

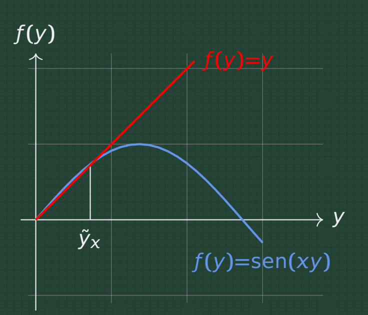
Solución:

Una solución obvia es $y = 0$.

¿Hay mas soluciones?
Para averiguarlo, supongamos que $y \neq 0$.

En ese caso sabemos que $|\sin y| < |y|$, y entonces no hay otras soluciones para $x = 1$.

Sin embargo $y = 0$ no es solución única en ninguna vecindad de $(x, y) = (1, 0)$. La razón es que para x cercano pero mayor a 1, la ecuación tiene dos soluciones $y = 0$ y $\tilde{y}_x > 0$ (como puede verse en la figura) y $\lim_{x \searrow 1} \tilde{y}_x = 0$.



Por esta razón no se puede usar el TFI en $(x, y) = (1, 0)$: $F_y(1, 0) = (1 - x\cos(xy))|_{x=1,y=0} = 0$.

Para $0 < x < 1$, $y = 0$ es la única solución y se puede usar el TFI. Para x cercano pero mayor a 1, se puede usar el TFI con cualquiera de las dos soluciones $y = 0$ o $\tilde{y}_x$. Para x más grande comienzan a aparecer más soluciones.

Teorema de la función implícita en tres dimensiones

Teorema: (Teorema de la función implícita en tres dimensiones)

Sea $F(x,y,z)$ con derivadas parciales continuas en una vecindad de (x_0,y_0,z_0), $F(x_0,y_0,z_0)=r$, y $\partial_z F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Entonces existe una vecindad U de (x_0,y_0) y un intervalo $[c,d]$ con centro en z_0, donde para cada $(x,y)\in U$ existe un único $z=f(x,y)$ en $[c,d]$ que satisface la ecuación $F(x,y,z)=r$.

Además $f(x_0, y_0) = z_0$ y $\partial_z F(x, y, f(x, y)) \neq 0$ para todo (x, y) en U, en donde f es continua y tiene derivadas parciales continuas dadas por

$$\partial_x f(x, y) = -\frac{\partial_x F(x, y, f(x, y))}{\partial_z F(x, y, f(x, y))},$$

$$\partial_y f(x, y) = -\frac{\partial_y F(x, y, f(x, y))}{\partial_z F(x, y, f(x, y))}.$$

[La prueba es análoga al caso anterior, solo hay que adaptar los argumentos geométricos a una dimensión más]

Ejemplo:

La presión, temperatura y densidad de un gas se relacionan como

$$P + \alpha\rho^2 = \frac{R\rho T}{1 - b\rho},$$

donde α, b, R son constantes $\neq 0$.

Calcula la razón de cambio de la densidad ρ respecto a la temperatura.

Solución:

En lugar de resolver ρ podemos usar el TFI con

$$f(P,T,\rho) = P + a\rho^2 - \frac{R\rho T}{1-b\rho}.$$

Así, $\partial_\rho f = \left(2a - RT/(1-b\rho)^2\right)\rho$ es distinto de 0 para $2a \neq RT/(1-b\rho)^2$.

En ese caso existe $\rho = g(P,T)$ cerca de estos valores.

La razón de cambio buscada es

$$\partial_T g(P,T) = \frac{\partial_T f}{\partial_\rho f} = \frac{\frac{Rg(P,T)}{1-bg(P,T)}}{\left(2a - \frac{RT}{(1-bg(P,T))^2}\right) g(P,T)}$$

$$= \frac{R}{2a(1-bg(P,T)) - \frac{RT}{1-bg(P,T)}}.$$

Observación:

La notación en termodinámica para esta derivada es $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$, con el subíndice P como un recordatorio, algo redundante, de cual variable se deja fija.

Teorema de la función implícita en dimesión mayor

Teorema: (Teorema de la función implícita en dimensión mayor)

Denotamos los puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$como (x, z), con $x \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$.

Sea F una función de $n+1$ variables, con derivadas parciales continuas en una vecindad de (x_0, z_0), $F(x_0, z_0) = r$ y $\partial_z F(x_0, z_0) \neq 0$.

Entonces existe una vecindad U de x_0 y un intervalo $[c, d]$ con centro en z_0, donde para cada $x \in U$ existe un único $z = f(x)$ en $[c, d]$ que satisface la ecuación $F(x, z) = r$.

Además $f(x_0) = z_0$ y $\partial_z F(x, f(x)) \neq 0$ en el interior de U, en donde f es continua y tiene derivadas parciales continuas dadas por

$$\partial_{x_k} f(x) = -\frac{\partial_{x_k} F(x, f(x))}{\partial_z F(x, f(x))}\,.$$

[Nuevamente la prueba es una adaptación del caso unidimensinal]